

# CONTROLE COM COMPENSAÇÃO DE ATRITO PARA ESTRUTURAS DE BASE MÓVEIS DE ROBÔS MANIPULADORES

ARMANDO S. SANCA\* JÉS J. F. CERQUEIRA† CARLOS E. T. DÓREA†

\**Departamento de Computação e Automação da Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
Caixa Postal 1524, Campus Universitário Lagoa Nova, CEP: 59072-970,  
Natal, Rio Grande do Norte, Brasil*

† *Departamento de Engenharia Elétrica da Escola Politécnica da Universidade Federal da Bahia  
Rua Aristides Novis, 02, Federação, CEP:40210-630, Salvador, Bahia, Brasil  
Telefone: +55-71-3203-9776*

Email: armando@dca.ufrn.br, jes@ufba.br, cetdorea@ufba.br

**Abstract**— In this paper is presented a local velocity control with friction compensation for a mobile robot with two wheel differential drive. Each wheel is driven by a direct current electric motor. The mobile robot dynamic model has the inclusion of the LuGre model for friction. Cascade control structures are used in the direct current motors that drive the wheels to do compensations of the friction phenomena. Results from experiments and simulation are presented.

**Keywords**— Mobile robot, Modeling, Friction, Compensation and Control.

**Resumo**— Este artigo apresenta um controle local da velocidade com compensação de atrito de uma base móvel de robôs manipuladores com duas rodas diferenciais, acionados por motores elétricos de corrente contínua. É feita a modelagem dinâmica para o veículo com a inclusão do fenômeno do atrito, usando o modelo de LuGre. Para a compensação do atrito refletido nos motores de corrente contínua que acionam as rodas foram usadas estruturas de controle em cascata, com alguns resultados experimentais e de simulação são apresentados neste trabalho.

**Keywords**— Robô móvel, Modelagem, Atrito, Compensação e Controle.

## 1 Introdução

Os robôs que utilizam veículos autônomos como base móvel tem sido muito estudado nos últimos anos. Em particular, os robôs manipuladores móveis terrestres, que são veículos motorizados e com rodas, possuem uma estrutura dinâmica, usualmente de forma Lagrangeana e Newtoniana, o que conduz ao desenvolvimento de equações de movimento dinâmico em termos dos parâmetros geométricos e inerciais.

Uma consideração importante para todos os sistemas são as não-linearidades de entrada (Tao e Kokotovic, 1996). Particularmente, em um veículo com rodas acionadas por atuadores elétricos, a não linearidade de tipo zona morta é oriunda do fenômeno do atrito, que é um fenômeno muito complexo causado por não linearidades tais como: *Stiction*; Histerese; Efeito de *Strobeck*; *Stick-Slip*; Viscosidade; e dependência da frequência de entrada. Em baixa velocidade, o fenômeno do atrito afeta de forma significativa o movimento de um corpo, podendo provocar inclusive uma oscilação em torno do ponto de equilíbrio conhecida como ciclo limite.

Os sistemas robóticos são muitas vezes projetados a partir de modelos que não consideram as não-linearidades de entrada em tais sistemas. Estas não-linearidades provocam um desempenho pobre no sistema, e em alguns casos podem levar à instabilidade, caso uma estratégia de contro-

le apropriada não seja projetada (Bona e Indri, 2005). Os erros típicos causados pelo atrito são: erros de posicionamento em regime permanente, ciclos limite a baixas velocidades e pobre desempenho em sistemas com movimento relativo (Armstrong-Hélouvy *et al.*, 1994; Olsson e Åström, 2001). Armstrong-Hélouvy *et al.* (1994) apresenta um excelente estudo sobre o atrito e sua modelagem. Canudas de Wit *et al.* (1995) apresentou um estudo sobre compensação de atrito que é muito referenciado na literatura.

O objetivo deste trabalho é apresentar um esquema de controle com compensação de atrito de um veículo com duas rodas ativas. O projeto e a análise dos controladores serão desenvolvidos com base no modelo de base móvel apresentado em Laura *et al.* (2006) e em um modelo de atrito conhecido como LuGre, que foi apresentado em Canudas de Wit *et al.* (1995) e em Canudas de Wit (1998). A estrutura do texto é como segue: na seção 2 apresentam-se alguns conceitos preliminares necessários para a compreensão do conteúdo do artigo; na seção 3 a modelagem e o esquema de controle com compensação de atrito de um veículo com duas rodas ativas diferenciais são desenvolvidos; por fim, os resultados obtidos em testes experimentais e simulações são apresentados na seção 4 e a conclusão apresentada na seção 5.

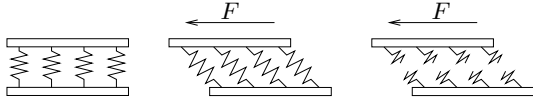


Figura 1: Visualização quando a força tangencial é aplicada entre duas superfícies.

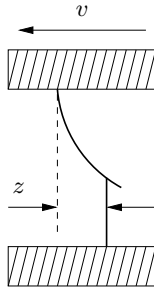


Figura 2: Deflexão da cerda entre duas superfícies.

## 2 Preliminares Teóricas

O atrito é uma força de reação tangencial que ocorre entre superfícies em contato. Fisicamente, esta força de reação é o resultado de muitos diferentes fenômenos que podem depender da topologia e geometria do contato, das propriedades dos materiais, dos volumes e das superfícies dos corpos, das velocidades relativas entre os corpos e dos regimes de lubrificação.

No modelo de LuGre, o atrito é modelado como a força média de deflexão de cerdas elásticas, como é ilustrado na figura 1. Este é um modelo muito apropriado para aplicações de controle devido a sua simplicidade e integração entre os regimes conhecidos como pré-escorregamento e escorregamento (Canudas de Wit *et al.*, 1995; Canudas de Wit, 1998).

Como ilustrado na figura 2, quando uma força tangencial é aplicada ao corpo as cerdas deflexionam como molas. Se a deflexão for suficientemente grande as cerdas começam a deslizar. A deflexão média das cerdas para um movimento é determinante para velocidade.

O modelo LuGre é da forma (Canudas de Wit *et al.*, 1995; Canudas de Wit, 1998):

$$\frac{dz(t)}{dt} = v(t) - \sigma_0 \frac{|v(t)|}{g(v(t))} z(t); \quad (1)$$

$$g(v(t)) = \alpha_0 + \alpha_1 e^{-(v(t)/v_S)^2};$$

$$F(t) = \sigma_0 z(t) + \sigma_1 \frac{dz(t)}{dt} + \alpha_2 v(t). \quad (2)$$

Em (1),  $z(t)$  representa a dinâmica um estado interno do atrito que descreve a deflexão media das superfícies em contato durante a fase chamada de *Stiction*, sendo este estado não mensurável, e  $g(v)$  é uma função decrescente para velocidade limitada crescente que descreve parte das características do modelo em regime permanente, com

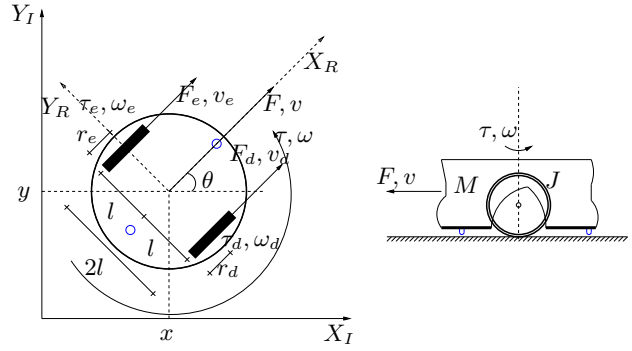


Figura 3: Diagrama das forças e torques que atuam sobre um veículo com duas rodas ativas acionado por atuadores elétricos.

$\{\infty > \alpha_0 + \alpha_1 \geq g(v) \geq \alpha_0 > 0\}$  e incluindo  $v_S$  que é uma constante chamada de velocidade de *Stribeck*. O coeficiente de atrito estático é dado por  $\alpha_0 + \alpha_1$  e o coeficiente de atrito de Coulomb é dado por  $\alpha_0$ .

Em (2),  $F(t)$  é o atrito. O parâmetro  $\sigma_0$  é o coeficiente de rigidez das deformações microscópicas de  $z(t)$  durante o regime chamado de pré-escorregamento, o parâmetro  $\sigma_1$  é o coeficiente de amortecimento associado com  $dz(t)/dt$  e o parâmetro  $\alpha_2$  é o coeficiente de atrito viscoso. Usualmente,  $\sigma_1$  decresce com o incremento da velocidade.

### 2.1 Função de Transferência Positiva Real

Um conceito importante encontrado em teoria de sistemas é o de *Passividade*. Em linhas gerais, um sistema (linear ou não) é *estritamente passivo* se consome energia e é *passivo* se não entrega energia.

Restringindo a atenção aos sistemas causais lineares e invariantes no tempo (**LTI**), este conceito está relacionado com a noção de função *positiva real* e *estritamente positiva real*. Se uma função de transferência  $H(s)$  é positiva real (**FPR**), então o sistema é passivo. Além disso, uma interconexão realimentada que contém um subsistema passivo (linear ou não), e um subsistema estritamente próprio, estritamente positivo real (**FSPR**) é sempre estável em malha fechada (Huang *et al.*, 1999).

## 3 Modelagem e Compensação de Atrito da Base Móvel

A base móvel considerada neste artigo é um veículo com duas rodas como mostrado na figura 3. As duas rodas fixas são acionadas por motores elétricos de corrente contínua (**CC**) com comandos independentes. Dois elementos de apoio equilibram o veículo sobre a superfície de movimento. Este é um sistema com dois graus de liberdade

(GDL) cujas saídas serão representadas pelas velocidades dos motores direito  $\omega_{md}$  e esquerdo  $\omega_{me}$ .

Inicialmente considere-se que  $v_d(t) = r_d \omega_d(t)$  e  $v_e(t) = r_e \omega_e(t)$ , com  $v_d(t)$  e  $v_e(t)$  como sendo as velocidades lineares das rodas no ponto de contato com a superfície de movimento e com  $\omega_d(t)$ , e  $\omega_e(t)$  como sendo as velocidades angulares das rodas no ponto de contato com a superfície de movimento. Adicionalmente,  $r_d$  e  $r_e$  são os raios das rodas direita e esquerda e as relações entre os movimentos dos motores elétricos e das rodas direita e esquerda respectivamente, são dadas por  $\omega_{md}(t) = N_d \omega_d(t)$ ,  $\omega_{me}(t) = N_e \omega_e(t)$ , onde  $N_d$  e  $N_e$  são os fatores de redução de velocidade das rodas direita e esquerda respectivamente.

Sabe-se ainda que

$$v(t) = \frac{v_d(t) + v_e(t)}{2} \quad (3)$$

e

$$\omega(t) = \frac{v_d(t) - v_e(t)}{2l}, \quad (4)$$

onde  $v(t)$  é a velocidade linear do centro do robô e  $\omega(t)$  é a velocidade angular do robô no mesmo ponto. A distancia entre as rodas é  $2l$ .

A força total que movimentava o veículo é dada por

$$F(t) = \frac{1}{r_d} \tau_d(t) + \frac{1}{r_e} \tau_e(t). \quad (5)$$

De forma similar, o torque total que faz girar o veículo é dado por

$$\tau(t) = \frac{l}{r_d} \tau_d(t) - \frac{l}{r_e} \tau_e(t), \quad (6)$$

onde  $\tau_e$  e  $\tau_d$  são os torques aplicados pelas rodas esquerda e direita ao corpo da base móvel.

As equações dinâmicas para os movimentos translação e rotação do veículo, sem considerar o atrito e outras perturbações, são expressas por

$$F(t) = M\dot{v}(t) \quad (7)$$

e

$$\tau(t) = J\dot{\omega}(t), \quad (8)$$

onde  $M$  e  $J$  representam a massa e o momento de inércia do veículo respectivamente.

No eixo dos motores, os modelos dinâmicos expressos sem perturbações de qualquer tipo podem ser escritos como segue:

$$\tau_{md}(t) = J_{md} \dot{\omega}_{md}(t) + \frac{\tau_d(t)}{\eta_d N_d}; \quad (9)$$

e

$$\tau_{me}(t) = J_{me} \dot{\omega}_{me}(t) + \frac{\tau_e(t)}{\eta_e N_e}. \quad (10)$$

As equações (9) e (10) expressam cada uma delas o comportamento ideal do modelo mecânico do motor CC sem considerar o atrito e outras perturbações que se opõem ao movimento nos mancais do rotor. Como se trata de um movimento

rotacional, aparecem na lei de movimento a velocidade angular  $\omega_{mi}$  e o momento de inércia  $J_{mi}$  do motor  $i$ .

O modelo matemático da dinâmica do veículo ilustrado na figura 3, a partir da manipulação das equações (3)-(10), sem inclusão dos fenômenos que se opõem ao movimento, pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} \tau_{md}(t) &= k_1 \dot{\omega}_{md} + k_2 \dot{\omega}_{me} \\ \tau_{me}(t) &= k_3 \dot{\omega}_{md} + k_4 \dot{\omega}_{me} \end{cases} \quad (11)$$

onde

$$k_1 = \frac{r_d^2}{4\eta_d N_d^2} \left( M + \frac{J}{l^2} \right) + J_{md}$$

$$k_2 = \frac{r_e r_d}{4\eta_d N_e N_d} \left( M - \frac{J}{l^2} \right)$$

$$k_3 = \frac{r_e r_d}{4\eta_e N_e N_d} \left( M - \frac{J}{l^2} \right)$$

$$k_4 = \frac{r_e^2}{4\eta_e N_e^2} \left( M + \frac{J}{l^2} \right) + J_{me}.$$

Se a dinâmica dos motores CC for muito rápida, o modelo (11) pode ser reduzido. este procedimento é útil quando a compensação é implementada computacionalmente com hardware com capacidade de processamento limitado. Assim, temos

$$\hat{\tau}_{md}(t) \cong \frac{K_{td} V_d'}{R_d} \delta_d(t) - \frac{K_{emd} K_{td}}{R_d} \omega_{md}(t) \quad (12)$$

e

$$\hat{\tau}_{me}(t) \cong \frac{K_{te} V_e'}{R_e} \delta_e(t) - \frac{K_{eme} K_{te}}{R_e} \omega_{me}(t), \quad (13)$$

onde  $V_d'$  é a fonte de tensão primária dos motores CC e  $K_{td}$ ,  $K_{te}$ ,  $K_{emd}$ ,  $K_{eme}$ ,  $R_d$  e  $R_e$  representam respectivamente as constantes de torque, as constantes de força contra-eletromotriz e as resistências elétricas para os motores. As variáveis de entrada  $\delta_d(t)$  e  $\delta_e(t)$  são os sinais de alimentação dos motores direito e esquerdo expressos em largura de pulso (PWM).

### 3.1 Projeto do Sistema de Controle

A estratégia de controle proposta, como ilustrado em esquema de blocos na figura 4, possui uma estrutura em cascata para cada atuador elétrico. O torque é controlado a partir da sua estimação e de uma referência fornecida por um controlador de velocidade. Os efeitos causados pelos torques de atrito são compensados a partir de um observador de atrito que modela o fenômeno. A fonte de tensão primária que alimenta o sistema é considerada como tendo um valor constante invariante no tempo  $V_d'$ . A detecção da velocidade de cada motor é feita a partir da leitura

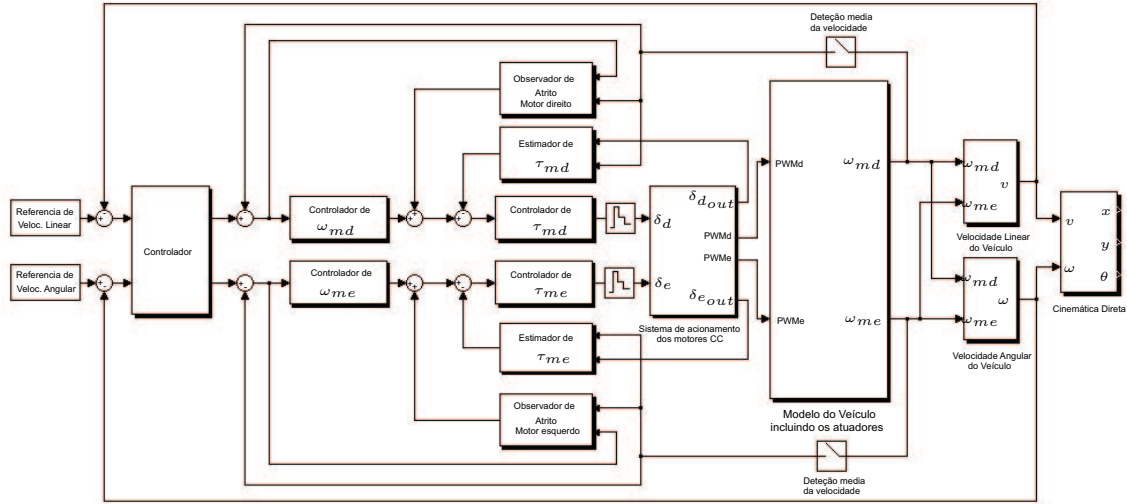


Figura 4: Diagrama em blocos do sistema de controle proposto para o robô móvel com duas rodas ativas acionadas por atuadores elétricos **CC**, com inclusão da não linearidade de entrada inerente de tipo atrito.

dos *encoders* incrementais e a velocidade média é a diferença entre os pulsos detectados gerados pelos *encoders* em cada período de amostragem da estrutura de controle.

Os atuadores que comandam o sistema são considerados como possuindo características similares, sendo possível um perfeito desacoplamento entre as duas malhas de controle se as funções de transferências relacionadas a cada um dos motores forem iguais. Partindo dessa hipótese, considera-se os  $\omega_{mi}(t)$  como sendo perturbações nas equações (12) e (13). Controladores **PI** discretos podem ser usados para as malhas de torque de ambos motores.

### 3.2 Controle da Velocidade com Compensação de Atrito

De (11), considerando apenas os ramos diretos dos atuadores  $i$  [direito ou esquerdo], temos

$$\left[ \frac{r_i^2}{4\eta_i N_i^2} \left( M + \frac{J}{l^2} \right) + J_{mi} \right] \dot{\omega}_{mi} = \tau_{mi} - F_{mi}(t),$$

onde  $F_{mi}(t)$  são os torques de reação que modelam o atrito no veículo vistos pelos motores.

Utilizamos o modelo de LuGre para ambos atuadores teremos

$$\bar{J}_{mi} \dot{\omega}_{mi}(t) = \tau_{mi}(t) - F_{mi}(t), \quad (14)$$

onde:

$$\begin{aligned} \bar{J}_{mi} &= \frac{r_i^2}{4\eta_i N_i^2} \left( M + \frac{J}{l^2} \right) + J_{mi}; \\ F_{mi}(t) &= \sigma_{0i} z_i(t) + \sigma_{1i} \frac{dz_i(t)}{dt} + \alpha_{2i} \omega_{mi}(t); \\ \frac{dz_i(t)}{dt} &= \omega_{mi}(t) - \frac{\sigma_{0i}}{g(\omega_{mi}(t))} |\omega_{mi}(t)| z_i(t); \\ g(\omega_{mi}(t)) &= \alpha_{0i} + \alpha_{1i} e^{-(\omega_{mi}(t)/\omega_{mSi})^2}. \end{aligned}$$

Os parâmetros estáticos  $\alpha_{0i}$ ,  $\alpha_{1i}$ ,  $\alpha_{2i}$  e  $\omega_{mSi}$ , e os parâmetros dinâmicos  $\sigma_{0i}$  e  $\sigma_{1i}$  foram previamente definidos.

Os estimadores de atrito não lineares são descritos na forma

$$\frac{d\hat{z}_i(t)}{dt} = \omega_{mi}(t) - \sigma_{0i} \frac{|\omega_{mi}(t)|}{g(\omega_{mi}(t))} \hat{z}_i(t) - k \varepsilon_i(t), \quad k > 0$$

$$\hat{F}_{mi}(t) = \sigma_{0i} \hat{z}_i(t) + \sigma_{1i} \frac{d\hat{z}_i(t)}{dt} + \alpha_{2i} \omega_{mi}(t)$$

onde  $\hat{z}_i(t)$  é a estimação do estado interno  $z_i(t)$ , não mensurável,  $\hat{F}_{mi}$  é o torque de atrito estimado,  $\varepsilon_i = \omega_{mi} - \omega_{rmi}$  é o erro de velocidade e  $\omega_{rmi}$  é a velocidade de referência desejada do motor  $i$ , que é assumido diferenciável. O termo  $k \varepsilon_i$  é um termo de correção da estimação em função do erro da velocidade.

Considerando a lei de controle

$$\begin{aligned} \tau_{mi}(t) &= -\mathcal{L}^{-1} \left\{ \bar{J}_{mi} H_{mi}(s) \varepsilon_{mi}(s) \right\} \\ &+ \bar{J}_{mi} \frac{d\omega_{rmi}(t)}{dt} + \hat{F}_{mi}(t), \quad (15) \end{aligned}$$

$H_{mi}(s)$  pode ser obtido para que  $G_i(s)$  seja **FSPR** (Canudas de Wit *et al.*, 1995), onde

$$G_i(s) = \frac{\sigma_{1i} s + \sigma_{0i}}{\bar{J}_{mi} s + \bar{J}_{mi} H_{mi}(s)}.$$

A condição **FSPR** para  $G_i(s)$ , exclui o uso de um controlador **PID** com ação integral pura para  $H_{mi}(s)$ . Se  $H_{mi}(s)$  for definido por um controlador **PD**, teremos  $G_i(s) = \frac{\sigma_{1i} s + \sigma_{0i}}{\bar{J}_{mi}(s + K_p + K_d s)}$ , onde  $K_p$  e  $K_d$  são os ganhos proporcional e derivativo respectivamente. Assim, a condição **FSPR** sobre  $G_i(s)$  produz:  $K_p > \frac{\sigma_{0i}}{\sigma_{1i}}$  e  $K_d > \sqrt{2K_p}$  (Lischinsky *et al.*, 1999).

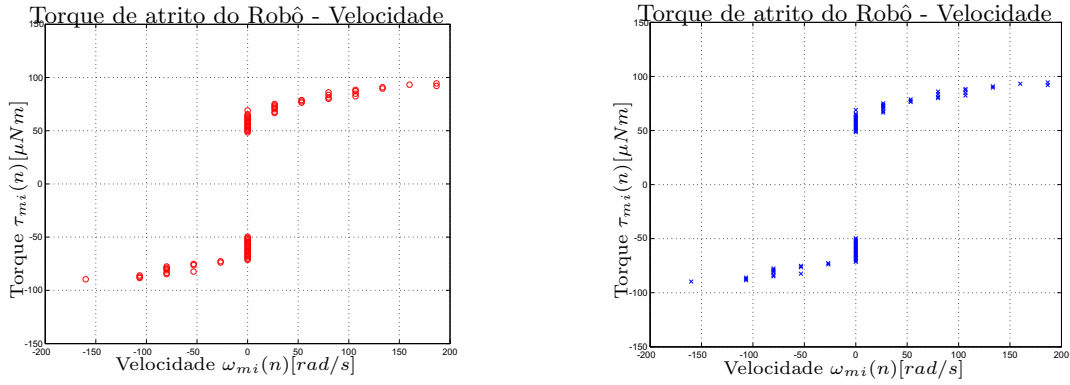


Figura 5: Valores obtidos no experimento para a força de atrito do Robô Khepera II em função da velocidade, pontos coletados em regime permanente com tempo de estabilização de um segundo para os motores esquerdo [o] e direito [x] respectivamente, em ambos sentidos.

Tabela 1: Parâmetros obtidos por medição direta do sistema físico Robô *Khepera II*.

Massa do veículo [M]	108,146 g
Diâmetro do veículo	70,0 mm
Distância entre as rodas [2 l]	53,0 mm
Raio da cada roda [ $r_d$ e $r_e$ ]	7,5 mm
$K_{td}$ e $K_{te}$	1,66 mNm/A
$K_{emd}$ e $K_{eme}$	1,66 mVs/rad
$N_d$ e $N_e$	25
$L_d$ e $L_e$	180 $\mu$ H
$R_d$ e $R_e$	21,5 $\Omega$
$J_{md}$ e $J_{me}$	0,02 $\mu$ kgm <sup>2</sup>
$B_{md}$ e $B_{me}$	12 nNms/rad
$J$	66,15 $\mu$ kgm <sup>2</sup>
$\eta$	0,94

Tabela 2: Parâmetros estáticos da força de atrito, para o Robô *Khepera II*, com  $\alpha_{1i} = 0$  e  $\omega_{mSi} = 0$

$\alpha_{0i}$ ( $\mu$ Nm)		$\alpha_{2i}$ ( $\mu$ Nms/rad)	
esquerdo	direito	esquerdo	direito
69,692	69,692	0,135	0,135
-75,282	-75,282	0,068	0,068

#### 4 Resultados Experimentais

A determinação dos parâmetros estáticos e dinâmicos é tratada em Canudas de Wit e Lischinsky (1997). O Robô Móvel *Khepera II*<sup>®</sup> da K-Team S. A. foi usado como módulo experimental para as aplicações de controle. Os parâmetros do robô estão resumidos na tabela 1. Os quatro primeiros parâmetros foram obtidos experimentalmente e os restantes a partir de dados de catálogos.

Um experimento foi feito no robô *Khepera II* objetivando a determinação dos parâmetros do modelo e LuGre, com os motores elétricos sendo comandados por sinais modulados por larguras de pulso digital (DPWM). A detecção média da ve-

locidade em cada motor é feita a partir dos encoders incremental localizado no eixo cada motor, com período de amostragem de 10ms.

Na Figura 5 são mostradas as curvas de torque motor em função da velocidade angular para ambos os sentidos de movimento para motores esquerdo [o] e direito [x] respectivamente. Os pontos foram coletados com períodos de estabilização de um segundo, garantindo assim leituras de velocidade o torque de atrito em regime permanente para o sistema.

Na figura 5 os componentes de atrito de Coulomb e o atrito viscoso podem ser observados, embora a baixa resolução de velocidade dada pelo *encoder* incremental, resultando apenas na observação de componentes com incrementos de 26.6667 rad/s, não permita a nítida observação destes fenômenos de atrito em baixas velocidades. A tabela 2 ilustra os parâmetros identificados nos motores direito e esquerdo do robô *Khepera II*. Os parâmetros dinâmicos  $\sigma_{0i} = 0,0001$  nNm/rad e  $\sigma_{1i} = 0,1$  nNms/rad foram usados heurísticamente.

A figura 6, ilustra os resultados obtidos por simulação para o controle por compensação de atrito, sendo a referência um degrau de 500 rad/s. O sistema começa a estabilizar ao redor dos 200 ms. Na figura pode ser observado também o comportamento do atrito frente ao torque externo, entregue pelo controlador de velocidade e finalmente o comportamento do estado interno  $z(t)$ .

#### 5 Conclusão

Neste artigo foram apresentados resultados que permitem comprovar a eficiência do método de compensação de atrito no controle no espaço de atuadores em sistemas robóticos móveis. Os efeitos indesejáveis da zona morta podem assim serem compensados.

Os resultados obtidos permitem comprovar que o modelo de LuGre pode ser utilizado de

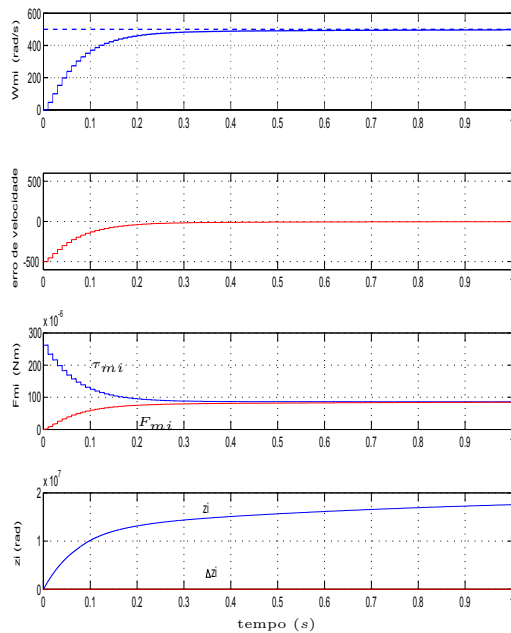


Figura 6: Controle de velocidade.

forma eficiente para a compensação de atrito em um sistema robótico móvel. Esta abordagem possibilita atenuar o efeito indesejável do ciclo limite em baixas velocidades em bases móveis de robôs. Uma observação importante é que sensores de corrente ou de torque seriam apropriados para uso em sistemas robóticos com compensação de atrito.

### Agradecimentos

Os autores deste artigo gostariam de agradecer às instituições a seguir pelo apoio dado ao desenvolvimento desta pesquisa: **FAPESB** - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado da Bahia; **CNPq** - Conselho Nacional de Desenvolvimento científico e Tecnológico; e **CAPES** - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

### Referências

- Armstrong-Hélouvry, B., P. Dupont e C. Canudas de Wit (1994). A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction. *Automatica* **30**(7), 1083–1138. Elsevier Science Ltd.
- Bona, B. e M. Indri (2005). Friction compensation in robotics: an overview. *IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference* pp. 4360–4367.
- Canudas de Wit, C. (1998). Comments on: A new model for control of systems with friction. *IEEE Transactions on Automatic Control* **43**(8), 1189–1190.

Canudas de Wit, C., H. Olsson, K. J. Åström e P. Lischinsky (1995). A new model for control of systems with friction. *IEEE Transactions on Automatic Control* **40**(3), 419–425.

Canudas de Wit, C. e P. Lischinsky (1997). Adaptive friction compensation with partially known dynamic friction model. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* **11**, 65–80.

Huang, C. H., P. A. Ioannou, J. Maroulas e M. G. Safonov (1999). Design of strictly positive real systems using constant output feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control* **44**(3), 569–573.

Laura, T. L., J. J. F. Cerqueira, C. C. Paim, J. A. Pomílio e M. K. Madrid (2006). Modelo dinâmico da estrutura de base de robôs móveis com inclusão de não linearidades - o desenvolvimento do modelo. Em: *Anais do XVI Congresso Brasileiro de Automática*. Sociedade Brasileira de Automática. Salvador, Bahia. pp. 2879–2884.

Lischinsky, P., C. Canudas-de-Wit e G. Morel (1999). Friction compensation for an industrial hydraulic robot. *IEEE Control Systems* pp. 25–32.

Olsson, H. e K. J. Åström (2001). Friction generated limit cycles. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **9**(4), 629–636.

Tao, G. e P. V. Kokotovic (1996). *Adaptive Control of Systems with Actuator and Sensor Nonlinearities*. John Wiley & Sons, Inc.